Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA. **Rect@**

Volumen 13. Paginas 42 a 55.

LA ELASTICIDAD: UNA NUEVA HERRAMIENTA PARA CARACTERIZAR DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

ERNESTO J. VERES FERRER
Ernesto.Veres@uv.es
Facultat d'Economía
Universitat de Valencia / Departamento de Economía Aplicada
Av Tarongers, s/n 46022-Valencia

JOSE M. PAVÍA
pavia@uv.es
Facultat d'Economía
Universitat de Valencia / Departamento de Economía Aplicada
Av Tarongers, s/n 46022-Valencia

Recibido 08/03/2012
Revisado 13/07/2012
Aceptado 24/07/2012

RESUMEN: La elasticidad de la función de distribución de una variable aleatoria es un concepto, que procedente del campo económico, ha sido muy recientemente introducido en estadística. Este trabajo muestra, tanto para el caso continuo como discreto, cómo es posible caracterizar una distribución de probabilidad a partir de ella, ilustrándolo con varios ejemplos. Los analistas podrán encontrar en la elasticidad un nuevo instrumento para comprender las situaciones de riesgo e incertidumbre, que hará posible, así mismo, el surgimiento de nuevos modelos de probabilidad difíciles de razonar de otra manera.

Palabras claves: elasticidad, función de distribución, distribución de una variable aleatoria, función de riesgo inversa.

ABSTRACT: The elasticity of the distribution function of a random variable is a concept just recently introduced in statistics from economics. This work shows, in both the continuous and discrete case, how the probability distribution of the random variable could be characterized from it and illustrates this through several examples. We hope analysts found in the elasticity a new tool for understanding the situations of risk and uncertainty and that, moreover, this makes possible to merge new random models, hardly imaginable or justifiable otherwise.

Keywords: distribution function, elasticity, random variable distribution, reverse hazard function.

1. Introducción

La elasticidad es actualmente una herramienta de análisis muy popular en economía. Desde que Alfred Marshall —tomándola prestada de la física— la incluyese en su famoso e influyente libro *Principles of Economics* (1890), varias generaciones de economistas han venido utilizándola como medio para cuantificar las variaciones que experimenta una variable ante cambios en otra.

Recientemente, el concepto ha sido exportado al campo estadístico (Veres y Pavía, 2012), siendo relacionado con la función de riesgo inversa —*reverse hazard rate* (ver, Finkelstein, 2002; Chechile, 2011)— de una variable aleatoria. La función de riesgo inversa fue inicialmente sugerida en el mundo actuarial y ha encontrado en el campo de la ingeniería sus principales aplicaciones (ver, e.g., Desai et al., 2011). Veres y Pavía (2012) han mostrado que la elasticidad de una función respecto a una variable, entendida como medida de la sensibilidad de la función frente a variaciones en el valor de la variable, puede también ser construida en el caso de que la función sea la de distribución de una variable aleatoria.

La elasticidad de una distribución de probabilidad expresa la variación que experimenta la función de distribución ante variaciones de la variable aleatoria; esto es, cómo se comporta la acumulación de la probabilidad en el dominio de definición de la variable. La elasticidad de la distribución de una variable aleatoria (al contrario de lo que puede ocurrir en economía) nunca puede ser negativa, siendo esencialmente positiva. En efecto, al ser la probabilidad no negativa su acumulación es siempre no decreciente.

Aunque este trabajo se centra en algunos aspectos abstractos de este nuevo concepto, la herramienta aquí presentada no se circunscribe a la esfera teórica. Por una parte, ofrece la posibilidad de describir comportamientos aleatorios con un nuevo enfoque, lo que permitirá, como ha ocurrido en el pasado con instrumentos similares, descubrir nuevos modelos de probabilidad (ver, Veres y Pavía, 2012), posibilitando con ello una mejor descripción y ajuste a las situaciones de incertidumbre y riesgo que encontramos en el mundo real. Por otra parte, posibilitará observar las situaciones de incertidumbre con un nuevo prisma, haciendo posible con ello encontrar, utilizando nuevos caminos, respuestas y soluciones a las mismas (ver, Pavía y Veres, 2012).

Este trabajo muestra, tanto para el caso continuo como discreto, cómo es posible caracterizar una distribución de probabilidad a partir de la elasticidad de la variable aleatoria, ilustrándolo con varios ejemplos. El resto del documento está estructurado como sigue. La sección segunda define la elasticidad en el contexto probabilístico e interpreta su significado. En la sección tercera se ofrece una interpretación intuitiva con ayuda de una representación gráfica de su significado. La sección cuarta demuestra cómo la distribución de probabilidad de la variable aleatoria queda unívocamente determina a partir de la elasticidad. La sección quinta relaciona el concepto de elasticidad con el de las tasas de variación (lineal e instantánea) de la función de distribución. En la sección sexta se muestra, a través de varios ejemplos, cómo determinar la función de distribución de probabilidad de una variable aleatoria a partir de la elasticidad y, así mismo, se obtiene para cuatro de modelos de probabilidad muy conocidos su elasticidad asociada. La última sección cierra el documento indicando alguna de las potencialidades de la nueva herramienta y animando a los investigadores a incorporarla en su arsenal de instrumentos de análisis.

2. Elasticidad de la distribución de una variable aleatoria

Sea X una variable aleatoria continua, con soporte $D=[a,b]\subseteq R$. Denotando por $F(x)$ a su función de distribución y mediante $f(x)$ a su función de densidad, definimos la elasticidad de X como:

$$Elas(x)=\frac{dlnF(x)}{dlnx}=\frac{F'(x)/F(x)}{1/|x|}=\frac{|x|\cdot f(x)}{F(x)}\geq 0 \quad \forall x\in (a,b] \qquad (1)$$

donde se debe tomar la última igualdad de la ecuación como definición operativa de la elasticidad y el valor absoluto viene exigido por ser la elasticidad no negativa, tal como se razonó en la introducción.

La interpretación de los posibles valores de *Elas*(x) es la propia del concepto de elasticidad. Un valor *Elas*(x) = 0 implica una situación de inelasticidad perfecta: en ese valor de la variable un cambio infinitesimal en la misma no genera prácticamente un incremento en la acumulación de la probabilidad. Un valor 0 < *Elas*(x) < 1 describe una situación de inelasticidad, en tanto que un incremento en el valor de la variable supone un incremento menor en la acumulación de la probabilidad. El valor *Elas*(x) = 1 expresa una elasticidad unitaria, en la que un incremento infinitesimal de la variable da lugar al mismo incremento en la acumulación de la probabilidad. Finalmente, un valor *Elas*(x) >1 expresa una situación de elasticidad, en tanto que un incremento en el valor de la variable se traduce en un incremento mayor en la acumulación de probabilidad. Cuando *Elas*(x) tiende a infinito la situación corresponde a una situación de elasticidad perfecta, donde un incremento infinitesimal en el valor de la variable aleatoria se traduce en un altísimo (teóricamente infinito) incremento en la acumulación de la probabilidad.

En el caso discreto, también es posible definir la elasticidad de la variable aleatoria. Consideremos ahora una variable aleatoria discreta X, que toma como posible valores x_0, x_1, x_2, x_3,..., denotando por $F(x_i)$ la función de distribución y $p(x_i)$ la función de probabilidad o cuantía, definimos la elasticidad de la variable aleatoria mediante:

$$Elas(x_i) = \begin{cases} \dfrac{|x_i| \cdot p(x_i)}{\sum_{j<i} p(x_j)} = \dfrac{|x_i| \cdot p(x_i)}{F(x_i)} & x = x_1, x_2, x_3 \ldots \\ 0 & \forall x > x_0 \ y \ x \neq x_1, x_2, x_3 \ldots \end{cases} \qquad (2)$$

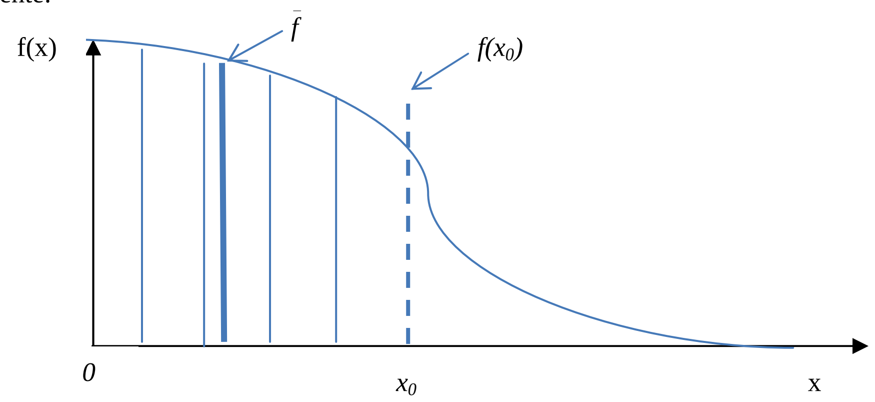
3. Interpretación de la elasticidad para variables con soporte en $\Re^+$

Obsérvese que la elasticidad de una distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua X, que toma valores en el dominio de definición $D = [0,b] \subseteq R$, con función de distribución $F(x)$ y función de densidad $f(x)$, puede escribirse en un punto cualquiera de x_0 de D como:

$$Elas(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Delta F(x_0) / F(x_0)}{\Delta x_0 / x_0} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\left(F(x_0+\varepsilon) - F(x_0)\right) / F(x_0)}{\left((x_0+\varepsilon) - x_0\right) / x_0} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\left(F(x_0+\varepsilon) - F(x_0)\right) / \varepsilon}{F(x_0) / x_0} = \frac{f(x_0)}{\left(F(x_0) - F(0)\right) / (x_0 - 0)}$$

Por lo que, la elasticidad en un punto del dominio de definición de la variable es igual al cociente entre la función de densidad y el incremento de probabilidad medio hasta ese punto. O, lo que es lo mismo, el cociente entre la velocidad con que se incrementa la acumulación de probabilidad en ese punto y la "velocidad media" que dicho incremento ha experimentado hasta ese punto: $Elas(x_0) = f(x_0) / \bar{f}$. Gráficamente:



Es decir, el numerador es el valor de la función de densidad en x_0 mientras que el denominador es el cociente entre el área encerrada por la curva *f(x)* en [0, x_0] y la amplitud del intervalo [0, x_0]: esto es, la altura "media" de la curva en [0, x_0].

4. Caracterización de una variable aleatoria a través de su elasticidad

De igual modo que la función característica, la función de distribución o la función de densidad (o de cuantía, en el caso discreto), permiten caracterizar unívocamente a una variable aleatoria, en este apartado se demostrará que la elasticidad de una distribución de probabilidad también permite su caracterización.

4.1. *Caso Continuo*

Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución $F(x)$, función de densidad $f(x)$ y soporte en un intervalo cualquiera de la recta real $D=[a,b]\subseteq R$ (ó $D=(a,b)$ ó $[a,b)$ ó $(a,b]\subseteq R$), denotando mediante *C(x)* al cociente entre *f(x)* y *F(x)*, es inmediato que:

$$Elas(x)=|x|\cdot C(x)\ \ \forall x\in (a,b] \rightarrow C(x)=\frac{Elas(x)}{|x|}\ \ \forall x\in (a,b] \qquad (3)$$

donde *C(x)* es la función de riesgo inversa contínua, la cual verifica la siguiente proposición.

Proposición 1.

La reserve hazard function o función de riesgo inversa es no negativa, continua en D y cumple que $\lim_{x\to a}\left(\int_x^b C(u)du\right)=+\infty$.

Demostración

En efecto, por construcción $C(x)>0$ y es continua en $\forall x\in D-\{a\}$ al ser cociente de dos funciones que también lo son. Además, dado que:

$$\frac{d\ln F(x)}{dx}=\frac{f(x)}{F(x)}=C(x)$$

se verifica que:

$$\int_{a+\varepsilon}^b C(x)dx=\int_{a+\varepsilon}^b \frac{d\,lnF(x)}{dx}dx=ln\,F(b)-ln\,F(a+\varepsilon)=-ln\,F(a+\varepsilon)$$

De donde:

$$\lim_{x\to a}\int_x^b C(u)du=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b C(u)du=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-ln\,F(a+\varepsilon)\right]=+\infty$$

(c.q.d.)

Asimismo, cuando se conoce la función de riesgo inversa *C(x)*, también se conoce la función de distribución $F(x)$.

Proposición 2.

Si $C(x)$ *es una función no negativa y continua* $\forall x\in D-\{a\}$ *verificando* $\lim_{x\to a}\left(\int_x^b C(u)du\right)=+\infty$ *y* $\lim_{x\to+\infty} C(x)=0$, *entonces C(x) es la función de riesgo inversa de la variable aleatoria que, tomando valores en D, tiene como función de distribución*

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x \le a \\ exp\left\{-\int_x^b C(u)du\right\} & x\in (a,b) \\ 1 & x \ge b \end{cases} \qquad (4)$$

Demostración

En efecto, *F(x)* verifica las propiedades para ser una función de distribución:

a) $F(-\infty)=\lim_{x\to a} exp\left\{-\int_x^b C(u)du\right\}=exp\left\{-\lim_{x\to a}\int_x^b C(u)du\right\}\Bigg|_{por\ hipótesis}=e^{-\infty}=0$

b) $F(+\infty)=exp\left(-\int_b^b C(u)du\right)=e^{\ 0}=1$

c) $exp\left\{-\int_x^b C(u)du\right\}$ es continua $\forall\, x\in\ D-\{a\}$, al serlo $C(x)$ por hipótesis y, consecuentemente, $\int_x^b C(u)du$.

d) *F(x)* es creciente en $D-\{a\}$, pues como $C(x)$ es continua en $D-\{a\}$:

$$\frac{d}{dx}\int_x^b C(u)du = \ C(\ x\ ) \text{ y } \frac{d}{dx}exp\left\{-\int_x^b C(u)du\right\}=C(\ x\ )exp\left\{-\int_x^b C(u)du\right\}$$

Por lo que *F(x)* es derivable en $D-\{a\}$. Y como $C(x) > 0$, se sigue que la derivada de *F(x)* es positiva, por lo que *F(x)* es creciente en $D-\{a\}$.

Además, la variable aleatoria que tiene a $F(x)$ como función de distribución tiene a $C(x)$ como función de riesgo inversa. En efecto, dado que:

$$\frac{dF(x)}{dx}=C(x)exp\left\{-\int_x^b C(u)du\right\} \text{ y } f(\ x\ )=\frac{dF(x)}{dx}$$

resulta:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{C(x)exp\left\{-\int_x^b C(u)du\right\}}{exp\left\{-\int_x^b C(u)du\right\}}=C(x)$$

(c.q.d.)[*]

Es decir, conocida la elasticidad de una distribución también lo es su función de distribución.

Corolario.

Si Elas(x), $\forall\, x\in\ D-\{a\}$, *es la elasticidad de la distribución de una variable aleatoria, entonces su distribución de probabilidad viene dada por:*

[*] Obsérvese que de (4) se deduce también la siguiente ecuación diferencial:

$$f(x)=\frac{d\,F(x)}{dx}=C(x)exp\left\{-\int_x^b C(u)du\right\}\to\ ln\ f(x)=ln\,C(x)-\int_x^b C(u)du\to$$

$$\to\ \frac{d\ ln\ f(x)}{dx}=\frac{\frac{d\,C(x)}{dx}}{C(x)}+C(x)\to\ \frac{d\,C(x)}{dx}+C^2(x)-C(x)\frac{d\ ln\ f(x)}{dx}=0$$

por lo que la función $C(x)$ puede obtenerse también, conocida la función de densidad, como solución de la anterior ecuación diferencial de Bernouilli.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x \le a \\ exp\left\{-\int_x^b \frac{Elas(u)}{|u|}du\right\} & x \in (a,b) \\ 1 & x \ge b \end{cases}$$

Finalmente, es fácil probar que si $\{Elas_i(x)\}_{i=1}^n$ denota las funciones de elasticidad de n variables aleatorias continuas definidas sobre el mismo conjunto soporte $D-\{a\}$, entonces la función $Elas(x)=\sum_{i=1}^{n} Elas_i(x)$ es la función de elasticidad de una variable aleatoria X con conjunto soporte $D-\{a\}$ y función de distribución acumulativa dada por $F(x)=\prod_{i=1}^{n} F_i(x)$, donde $F_i(x)$ denota la función de distribución acumulativa asociada a la función de elasticidad $Elas_i(x)=|x|\cdot C_i(x)$. Es decir, la elasticidad de la distribución del producto de distribuciones es igual a la suma de elasticidades.

4.2. *Caso discreto*

Consideremos ahora una variable aleatoria discreta X, que toma como posible valores x_0, x_1, x_2, x_3,..., con función de distribución $F(x_i)$ y función de probabilidad o cuantía $p(x_i)$. Definiendo para el caso discreto la función cociente $C(x_i)$ como:

$$C(x_i)=\begin{cases} \dfrac{p(x_i)}{\sum_{j<i} p(x_j)}=\dfrac{p(x_i)}{F(x_{i-1})} & x_i = x_1, x_2, x_3 \ldots \\ 0 & \forall\ x_i > x_0 \wedge\ x_i \neq x_1, x_2, x_3 \ldots \end{cases} \qquad (5)$$

donde $C(x_i)$ no está definida en x_0, al no estarlo el denominador de (5), tenemos que, de (2), se sigue de forma inmediata la relación:

$$Elas(x_i)=\begin{cases} |x_i|\cdot C(x_i) & x_i = x_1, x_2, x_3 \ldots \\ 0 & \forall\ x_i > x_0 \wedge\ x_i \neq x_1, x_2, x_3 \ldots \end{cases}$$

Con la función cociente satisfaciendo las dos propiedades siguientes:

a) $C(x_i) > 0\ \ \forall x_i = x_1, x_2, x_3, \ldots$

b) $1 + C(x_i) = \dfrac{F(x_i)}{F(x_{i-1})}$ *existe* $\forall x_i = x_1, x_2, x_3, \ldots \wedge\ 1 + C(x) = 1\ \forall x_i > x_0\ \wedge\ \ x_i \neq x_1, x_2, x_3, \ldots$

Análogamente al caso continuo, si la función de distribución de la variable discreta es conocida, (4) también lo es. Y, por el contrario, conocida $C(x_i)$ y al ser $p(x_0)=\dfrac{F(x_1)}{1+C(x_1)}$ se sigue que:

$$F(x_i)= p(x_0)\cdot \prod_{1\le j\le i}\left(1+C(x_j)\right) \wedge\ \ 1 = p(x_0)\cdot \prod_{j\ge 1}\left(1+C(x_j)\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow\ \ p(x_0)=\frac{1}{\prod_{\forall j\ge 1}\left(1+C(x_j)\right)} \wedge\ \ F(x_i)=\frac{1}{\prod_{j>i}\left(1+C(x_j)\right)}\ \ \forall x_i = x_1, x_2, x_3, \ldots$$

Por tanto:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x < x_0 \\ \dfrac{1}{\prod_{j>i}\left(1+C(x_j)\right)} & \forall x_i \le x < x_{i+1} \end{cases}$$

Y en caso de que el conjunto $\{x_i\}_{i\geq 0}$ esté acotado superiormente por x_ω:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<x_0 \\ \dfrac{1}{\prod\limits_{j>i}\left(1+C(x_j)\right)} & \forall x_i \leq x < x_{i+1} \wedge \ x_i < x_\omega \\ 1 & \forall x \geq x_\omega \end{cases}$$

La función $F(x)$ cumple efectivamente las tres propiedades de una función de distribución:

a) $F(-\infty)=0 \wedge \ F(+\infty)=1$, por definición.

b) *F(x) es no decreciente*: $F(x_{i-1})=\dfrac{1}{\prod\limits_{j>i-1}\left(1+C(x_j)\right)}<\dfrac{1}{\prod\limits_{j>i}\left(1+C(x_j)\right)}=F(x_i)$

c) Es continua por la derecha de cada valor x_i con masa de probabilidad, por construcción.

La expresión equivalente a (4) para este caso discreto es:

$$F(x_i)=e^{\sum\limits_{j>i} ln\left(1+C(x_j)\right)} = p(x_0)\cdot e^{\sum\limits_{j\leq i} ln\left(1+C(x_j)\right)}$$

Como alternativa a la definición de (5), siguiendo a Chechile (2011) y Veres y Pavía (2012), resultados análogos pueden alcanzarse utilizando la función de riesgo inversa discreta definida, cuando $-\infty < x_0$, mediante:

$$Irisk(x_i)=\begin{cases} \dfrac{p(x_i)}{F(x_i)} & x_i = x_0, x_1, x_2 ... \\ 0 & x_0 \neq x_1, x_2, x_3 ... \end{cases}$$

5. Relación entre la elasticidad y la tasa instantánea de crecimiento de la función de distribución

Sea $y(t)$ una función derivable. Sea $r_l(t)$ su tasa de crecimiento lineal definida como:

$$y(t+\varepsilon)=y(t)\cdot\left(1+\varepsilon\cdot r_l(t)\right)\rightarrow \ \frac{y(t+\varepsilon)}{y(t)}=\left(1+\varepsilon\cdot r_l(t)\right)$$

La tasa lineal instantánea de crecimiento resulta:

$$r_l(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\cdot\left(\frac{y(t+\varepsilon)}{y(t)}-1\right)=\frac{1}{y(t)}\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{y(t+\varepsilon)-y(t)}{\varepsilon}\right)=\frac{d\ ln\{y(t)\}}{dt}$$

Por tanto, de (1), cuando la función $y(x)$ es una función de distribución de una variable aleatoria, se deduce que:

$$r_l(x)=\frac{Elas(x)}{|x|}\rightarrow \ Elas(x)=|x|\cdot r_l(x)$$

Resultado parecido ocurre si el crecimiento se especifica a través de una tasa de crecimiento acumulativo. En efecto, siendo $y(t)$ una función derivable y $r(t)$ su tasa de crecimiento acumulativo definida como:

$$y(t+\varepsilon)=y(t)\cdot\left(1+r(t)\right)^{\varepsilon} \rightarrow \ \frac{y(t+\varepsilon)}{y(t)}=\left(1+r(t)\right)^{\varepsilon}$$

por lo que la correspondiente tasa instantánea de crecimiento acumulativo es:

$$r(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{y(t+\varepsilon)}{y(t)}\right)^{1/\varepsilon}-1=e^{\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{\varepsilon}\cdot\left(\frac{y(t+\varepsilon)}{y(t)}-1\right)\right]}-1=e^{\frac{1}{y(t)}\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{y(t+\varepsilon)-y(t)}{\varepsilon}\right)}-1=e^{\frac{y'(t)}{y(t)}}-1$$

Y así, cuando la función *y(x)* es una función de distribución de una variable aleatoria resulta que:

$$r(x)=e^{\frac{Elas(x)}{|x|}}-1\rightarrow\ Elas(x)=|x|\cdot ln(1+r(x))$$

Se concluye, pues, que si $y(x)$ es la función de distribución de una variable aleatoria X, existe una relación funcional entre su elasticidad y las respectivas tasas de crecimiento, lineal o acumulativa, de la función de distribución.

En el caso discreto, la variable aleatoria toma valores en x_0, x_1, x_2, x_3,..., siendo constante la función de distribución entre ellos. De ahí que la tasa de crecimiento acumulativa sea:

$$r(x_i)=\left(\frac{F_{x_i}}{F_{x_{i-1}}}\right)^1-1=\frac{F_{x_i}-F_{x_{i-1}}}{F_{x_{i-1}}}=\frac{p_i}{F_{i-1}}=C(x_i)\quad x=x_1,x_2,x_3...$$
$$y\qquad r(x)=0\quad\forall\, x>x_0\ \ y\ \ x\neq x_1,x_2,x_3...$$

De (2) deducimos:

$$Elas(\,x_i\,)=\begin{cases}|x_i|\cdot r(x_i) & x=x_1,x_2,x_3...\\ 0 & \forall\, x>x_0\ and\ x\neq x_1,x_2,x_3...\end{cases}$$

Por consiguiente, tanto para el caso continuo como discreto, el conocimiento de las tasas de crecimiento, lineal o acumulativa, de la distribución de una variable aleatoria también permite identificar plenamente su distribución, al igualdad que las funciones de distribución, de densidad (o de probabilidad), y característica.

6. Ejemplos

Como ha quedado demostrado previamente, el modelo de probabilidad de cualquier variable aleatoria viene completamente caracterizado conociendo su elasticidad. Es decir, una vez especificado, a lo largo de su dominio de definición, la relación que existe entre la variación relativa de la acumulación de la probabilidad y la variación relativa del valor de la variable. Donde en esta comparación interviene, no sólo la *intensidad* del cambio, sino también la *velocidad* con la que se produce.

Esta nueva herramienta, por tanto, ofrece la posibilidad de conocer y analizar de forma alternativa las propiedades que cumplen nuestras distribuciones de probabilidad y, así mismo, abre nuevas vías para obtener distribuciones de probabilidad difícilmente imaginables de otro modo cumpliendo alguna característica que sea considerada deseable en términos de elasticidad para el problema tratado —ver, Veres y Pavía (2012) para un ejemplo.

A continuación, en este apartado se ofrecen, a modo de muestra, varios ejemplos de aplicación y operatividad de la función de elasticidad, *Elas(x)*. En los cuatro primeros ejemplos la función de elasticidad es conocida, y se determina a partir de ella la distribución de probabilidad cuyas propiedades se comprueban. En los cuatro ejemplos restantes se parte de modelos de probabilidad sobradamente conocidos, dos discretos y dos continuos, y a partir de sus distribuciones de probabilidad se obtienen sus funciones de elasticidad y cociente.

6.1. *Sea X una variable aleatoria continua, con función de elasticidad, Elas(x), dada por:*

$$Elas(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad\forall\, x\in\ (0,1)$$

y, por tanto, con función de riesgo inversa, $C(x)$:

$$C(x)=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \quad \forall\, x \in (0,1)$$

La distribución es elástica en todo el dominio de definición de la variable, $Elas(x)>1$, es creciente y tiende a la elasticidad perfecta en el límite superior de su dominio de definición.

$C(x)$ cumple las condiciones exigidas a una función de riesgo inverso. En particular:

a) $C(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}>0 \quad \forall\, x \in (0,1)$

b) $C(x)$ es continua $\forall\, x \in (0,1)$.

c) $\lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ b \to 1}} \displaystyle\int_{\varepsilon}^{b} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ b \to 1}} \left[ln\left(\frac{b}{1+\sqrt{1-b^2}} \right) - ln\left(\frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right) \right] = +\infty$

Por lo que:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x \le 0 \\ exp\left\{ -\lim\limits_{b \to 1} \displaystyle\int_{x}^{b} \frac{du}{u\sqrt{1-u^2}} \right\} = \dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} & x \in (0,1) \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

$F(x)$ es realmente función de distribución:

a) $F(-\infty)=\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}=0 \wedge \; F(+\infty)=\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}=1$

b) $F(x)$ es creciente, pues:

$$\frac{dF(x)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}>0 \quad \forall\, x \in (0,1)$$

c) $F(x)$ es continua en $x \in (0,1)$.

Las tasas de crecimiento instantáneo lineal y acumulativo son, respectivamente:

$$r_l(x)=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \quad \forall\, x \in (0,1) \qquad \text{y} \qquad r(x)=e^{\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}} \quad 1 \quad \forall\, x \in (0,1)$$

6.2. ***Sea X una variable aleatoria continua, con función de elasticidad Elas(x) y M, N > 0:***

$$Elas(x)=\frac{|x|\cdot MNe^{-Nx}}{1+Me^{-Nx}} \quad \forall\, x \in R$$

y función de riesgo inversa $C(x)$:

$$C(x)=\frac{MNe^{-Nx}}{1+Me^{-Nx}} \quad \forall\, x \in R$$

Para los valores negativos de X, la elasticidad de esta variable es decreciente, alcanzando la inelasticidad perfecta para $x = 0$; mientras que, en sus valores positivos, la elasticidad de la variable crece inicialmente para decrecer nuevamente hacia la inelasticidad perfecta a medida que aumenta el valor de X.

$C(x)$ cumple las condiciones exigidas a una función cociente. En particular:

a) $C(x) = \dfrac{MNe^{-Nx}}{1+Me^{-Nx}} > 0 \quad \forall x \in R$

b) $C(x)$ es continua $\forall x \in R$

c) $\lim\limits_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b \dfrac{MNe^{-Nu}}{1+Me^{-Nu}} du = \lim\limits_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \left[ln\left(\dfrac{1}{1+Me^{-Nb}}\right) - ln\left(\dfrac{1}{1+Me^{-Na}}\right) \right] = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{MNe^{-Nx}}{1+Me^{-Nx}} = 0$

Por lo que:

$$F(x) = exp\left\{ -\lim_{b\to+\infty} \int_x^b \frac{MNe^{-Nu}}{1+Me^{-Nu}} du \right\} = \frac{1}{1+Me^{-Nx}} \qquad \forall x \in R$$

es una función de distribución, que coincide con la distribución logística (Balakrishnan, 1992).

Las tasas de crecimiento instantáneo lineal y acumulativo son, respectivamente:

$$r_l(x) = \frac{MNe^{-Nx}}{1+Me^{-Nx}} \quad \forall x \in R \qquad \text{y} \qquad r(x) = e^{\frac{MNe^{-Nx}}{1+Me^{-Nx}}} - 1 \quad \forall x \in R$$

6.3. ***Sea X una variable aleatoria continua, con función de elasticidad Elas(x):***

$$Elas(x) = |x| \quad \forall x \le 0$$

y función de riesgo inversa $C(x)$:

$$C(x) = 1 \quad \forall x \le 0$$

La elasticidad de la distribución decrece, desde la elasticidad perfecta hasta la inelasticidad perfecta, que se alcanza en el límite superior del dominio de definición de la variable aleatoria.

$C(x)$ cumple las condiciones exigidas a una función de riesgo inversa. En particular:

a) $C(x) = 1 > 0 \quad \forall x \le 0$

b) $C(x)$ es continua $\forall x \le 0$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^0 du = -\lim\limits_{x\to-\infty} [x] = +\infty$

Entonces:

$$F(x) = \begin{cases} exp\left\{ -\int_x^0 du \right\} = e^x & x \le 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Es una función de distribución, que coincide con la de la variable aleatoria continua *exponencial unitaria limitada superiormente* (Labatut et al., 2009), caracterizada por ser la única variable aleatoria continua para la que son iguales sus funciones de densidad y de distribución.

Las tasas de crecimiento instantáneo lineal y acumulativo son, respectivamente:

$$r_l(x) = 1 \quad \forall x \le 0 \qquad \text{y} \qquad r(x) = e - 1 \quad \forall x \le 0$$

6.4. ***Sea X una variable aleatoria discreta, con función de elasticidad Elas(x):***

$$Elas(x_i) = 1 \quad \forall x_i \in Z^- \cup \{0\}$$

y con función cociente $C(x)$:

$$C(x)=1 \quad \forall x\in Z^{-}\cup\{0\}$$

Entonces:

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\prod_{j>i}^{0}(1+1)}=2^{x_i} & x_i\in Z \;,\forall x_i\le x<x_{i+1} \\ 1 & \forall x\ge 0 \end{cases}$$

$$p(x_i)=\begin{cases} F(x_i)-F(x_{i-1})=2^{x_i}-2^{x_{i-1}}=2^{x_{i-1}} & x_i\in Z^{-}\cup\{0\} \\ 0 & x_i\notin Z^{-}\cup\{0\} \end{cases}$$

que resulta ser una función de cuantía, pues $p(x_i)>0 \;\forall x_i\in Z^{-}\cup\{0\}$, y:

$$\sum_{x\in Z^{-}\cup\{0\}}2^{x-1}=\sum_{y\in Z^{+}\cup\{0\}}2^{-y-1}=\frac{1}{2}\times\sum_{y\in Z^{+}\cup\{0\}}2^{-y}=1$$

Esta variable aleatoria es la única variable discreta que verifica la propiedad equivalente de igualdad de las funciones de distribución y de densidad de probabilidad que cumplía la variable continua exponencial unitaria acotada superiormente del apartado anterior.

6.5. *Distribución de Bernouilli*

Sea X una variable aleatoria con distribución de Bernouilli. Entonces:

$$Elas(x)=C(x)=\frac{p}{1-p} \qquad x=1$$

y

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \forall x<0 \\ p_0=\dfrac{1}{1+C(x_1=1)}=1-p & x\in[0,1) \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$$

6.6. *Distribución de Poisson*

Sea X una variable aleatoria con Distribución de Poisson. Entonces:

$$Elas(x)=\begin{cases} \dfrac{\lambda^x/(x-1)!}{\sum_{x_j<x}\lambda^{x_j}/x_j!} & x=1,2,3,... \\ 0 & \forall x>0\wedge\; x\neq 1,2,3,... \end{cases} \quad \text{y} \quad C(x)=\begin{cases} \dfrac{\lambda^x/x!}{?_{j<i}\,\lambda^{x_j}/x_j!} & x=1,2,3,... \\ 0 & ?x>0\,?x?1,2,3,... \end{cases}$$

y que para x_i = 0, 1, 2, 3,... proporciona la función de distribución conocida:

$$F(x_i)=\frac{1}{\prod_{j>i}\dfrac{\sum_s^{j}\lambda^s/s!}{\sum_s^{j-1}\lambda^s/s!}}=\frac{1}{\dfrac{\sum_s^{i+1}\lambda^s/s!}{\sum_s^{i}\lambda^s/s!}\times\dfrac{\sum_s^{i+2}\lambda^s/s!}{\sum_s^{i+1}\lambda^s/s!}\times\dfrac{\sum_s^{i+3}\lambda^s/s!}{\sum_s^{i+2}\lambda^s/s!}\times\ldots}=$$

$$= \frac{\sum_{s}^{i} \lambda^s / s!}{\sum_{s}^{+\infty} \lambda^s / s!} = \frac{\sum_{s}^{i} \lambda^s / s!}{e^{\lambda}} = \sum_{s}^{i} e^{\;\lambda} \frac{\lambda^s}{s!}$$

6.7. *Distribución Uniforme*

Sea X una variable aleatoria con Distribución Uniforme en $[a,b]$. Entonces:

$$Elas(x) = \frac{|x|}{x-a} \quad \forall x \in (a,b] \quad \text{y} \quad C(x) = \frac{1/_{b-a}}{x-a/_{b-a}} = \left(1/_{x-a} \right) \quad \forall x \in (a,b]$$

Si $a < 0$ y $b < 0$, la elasticidad es decreciente, partiendo de la elasticidad perfecta; si $a < 0$ y $b > 0$, la elasticidad es decreciente, partiendo de la elasticidad perfecta hasta la inelasticidad en el valor 0 de la variable aleatoria, y creciente a partir de ese momento, sin llegar a la elasticidad infinita. Si $a = 0$, la elasticidad es unitaria en todo el dominio de definición. Finalmente, si $a \geq 0$, la elasticidad es decreciente, desde la elasticidad perfecta hasta el mínimo que se alcanza en el extremo superior del dominio de definición de la variable.

$C(x)$ cumple las condiciones exigidas a una función de riesgo inversa. En particular:

a) $C(x) = \frac{1}{x-a} > 0 \quad \forall x \in (a,b]$

b) $C(x)$ es continua $\forall x \in (a,b]$

c) $\lim_{x \to a} \int_x^b \frac{du}{u-a} = \lim_{x \to a} [ln(u-a)]_x^b = ln(b-a) - \lim_{x \to a} [ln(x-a)] = +\infty$

Entonces, la función de distribución deducida de $C(x)$ es la ya conocida:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ exp\left\{ -\int_x^b \frac{du}{u-a} \right\} = \frac{x-a}{b-a} & x \in (a,b) \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

Las tasas de crecimiento instantáneo lineal y acumulativo son, respectivamente:

$$r_l(x) = \frac{1}{x-a} \quad \forall x \in (a,b) \quad \text{y} \quad r(x) = e^{\frac{1}{x-a}} - 1 \quad \forall x \in (a,b)$$

6.8. *Distribución Exponencial*

Sea X una variable aleatoria, con Distribución Exponencial:

$$Elas(x) = \frac{\lambda x e^{-\lambda x}}{\left(1 - e^{-\lambda x}\right)} = \frac{\lambda x}{e^{\lambda x} - 1} \quad \forall x > 0 \quad \text{y} \quad C(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{\left(1 - e^{-\lambda x}\right)} \quad \forall x > 0$$

que confirma la situación de elasticidad de la distribución, decreciente desde la elasticidad perfecta, tendiendo asintóticamente a la inelasticidad.

$C(x)$ cumple las condiciones exigidas a una función de riesgo inversa. En particular:

a) $C(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{\left(1 - e^{-\lambda x}\right)} > 0 \quad \forall x > 0$

b) $C(x)$ es continua $\forall x > 0$.

c) $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to+\infty}} \int_x^y \frac{\lambda e^{-\lambda u}}{\left(1-e^{-\lambda u}\right)} du = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to+\infty}} \left[ln\left(1-e^{-\lambda u}\right)\right]_x^y = ln(1) - \lim_{x\to 0} ln\left(1-e^{-\lambda x}\right) = +\infty$ y $\lim_{u\to+\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda u}}{\left(1-e^{-\lambda u}\right)} = 0$

Entonces:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ exp\left\{-\lim_{b\to+\infty}\int_x^b \frac{\lambda e^{-\lambda u}}{\left(1-e^{-\lambda u}\right)}du\right\} = 1-e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

Las tasas de crecimiento instantáneo lineal y acumulativo son, respectivamente:

$$r_l(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{\left(1-e^{-\lambda x}\right)} \quad \forall x > 0 \qquad \text{y} \qquad r(x) = e^{\frac{\lambda e^{-\lambda x}}{\left(1-e^{-\lambda x}\right)}} - 1 \quad \forall x > 0$$

7. Conclusiones

La elasticidad es un concepto ampliamente utilizado en economía que muy recientemente se ha introducido en el campo estadístico. Este trabajo demuestra cómo la distribución de probabilidad de cualquier variable aleatoria unidimensional queda completamente determinada a partir de su especificación, ilustrándolo recurriendo a varios ejemplos.

Esta nueva herramienta, por tanto, abre nuevas vías a los investigadores, que esperemos no se circunscriban exclusivamente a la esfera teórica. Confiamos en que, como ocurrió hace casi un siglo con la introducción de la función de riesgo en la literatura actuarial (Steffensen, 1930), permita el surgimiento de nuevos modelos de probabilidad (como ocurrió con las leyes de mortalidad de Gompertz, Makeham, Lazarus o Sang, entre otras, y la función de riesgo), difíciles de razonar de otra manera, que posibiliten abordar situaciones de incertidumbre cuyas distribuciones de probabilidad sean adecuadas a las características del fenómeno de interés. Así mismo, confiamos que los analistas encuentren en el instrumento un nuevo elemento para valorar y comprender mejor sus situaciones de riesgo e incertidumbre y les animamos a que exploren sus potencialidades. Por ejemplo, Pavía y Veres (2012) utilizan el concepto de elasticidad de una variable aleatoria para evaluar si el comportamiento de los titulares de tarjetas de crédito a la hora de detectar una incidencia (de robo, hurto, extravío, pérdida o clonación) que afecte a la misma puede ser considerado por el emisor de la tarjeta como adecuado para basar en él un sistema de alerta. Obviamente, como ocurre siempre que se introduce una nueva herramienta, los investigadores pueden encontrar en ella nuevas aplicaciones difícilmente imaginables en sus inicios. En ese sentido, desearíamos que investigadores de otras áreas y con diferentes sensibilidades encuentren la elasticidad de una variable aleatoria también útil en sus disciplinas.

Agradecimientos

Jose M. Pavía agradece la financiación del MICINN a través del proyecto CSO2009-11246.

Referencias bibliografícas

1. N. Balakrishnan, *Handbook of the Logistic Distribution*, (Marcel Dekker, New York, 1992)
2. R. A. Chechile, Properties of reverse hazard functions, *Journal of Mathematical Psychology* **55**, 3 (2011) 203-222.
3. D. Desai, V. Mariappan y M. Sakhardande, Nature of reversed hazard rate: An investigation, *International Journal of Performability Engineering* **7** (2011) 165-171.
4. M. S. Finkelstein, On the reversed hazard rate, *Reliability Engineering & System Safety* **78** (2002) 71-75.
5. G. Labatut, J. Pozuelo y E. Veres, Modelización temporal de las ratios contables en la detección del fracaso empresarial en la PYME española, *Revista Española de Financiación y Contabilidad*. **XXXVIII**, 143, (2009), 423-447.

6. J. M. Pavía y E. Veres, Is the cardholder an efficient alarm system to detect credit card incidents?, (2012).
7. J. F. Steffensen, *Some Recent Researches in the Theory of Statistics and Actuarial Science*, (Cambridge University Press, New York, 1930).
8. E.J. Veres-Ferrer y J.M. Pavía, On the relationship between the reversed hazard rate and elasticity, *Statistical Papers*, forthcoming, (2012), DOI: 10.1007/s00362-012-0470-1.